## 基础课23 三角函数的图象与性质

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **考点考向** | **课标要求** | **真题印证** | **考频热度** | **核心素养** |
| 三角函数的图象与性质 | 理解 | 2023年新高考Ⅰ卷  2023年全国乙卷（文）  2023年天津卷 | ★★★ | 数学运算  直观想象  逻辑推理 |
| 命题分析预测 | 从近几年高考的情况来看，高考一般综合考查三角函数的图象与性质及恒等变换，平面向量的应用.预计2025年高考命题趋势变化不大，备考时要注意多选题和双空题的训练，注意命题的新角度 | | | |

### 基础知识·诊断

#### 夯实基础

##### 一、用五点法作正弦函数和余弦函数的简图

1.正弦函数，的图象中，五个关键点是①，，，，.

2.余弦函数，的图象中，五个关键点是②，，，，.

##### 二、正弦、余弦、正切函数的图象与性质（表中）

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 函数 |  |  |  |
| 图象 |  |  |  |
| 定义域 |  |  | ③，且 |
| 值域 | ④ |  |  |
| 最小正周期 |  |  |  |
| 奇偶性 | 奇函数 | ⑤偶函数 | 奇函数 |
| 递增区间 | ⑥ |  |  |
| 递减区间 |  | ⑦ | 无 |
| 对称中心 |  | ⑧ |  |
| 对称轴方程 | ⑨ |  | 无 |

#### 诊断自测

##### 题组1 走出误区

1. 判一判.（对的打“√”，错的打“×”）

（1） 在整个定义域上是增函数.( × )

（2） 函数与的单调递增区间都是.( × )

（3） 函数与的周期都是 .( √ )

（4） 若非零实数是函数的周期，则也是非零整数也是函数的周期.( √ )

2. （易错题）函数的值域为.

**【易错点】**容易忽视正弦函数的有界性以及换元后新元的取值范围.

[解析]令，则，所以，所以当,即，即或时，,当，即，即时，.故原函数的值域为.

##### 题组2 走进教材

3. （人教A版必修改编）函数在上的单调递增区间为和.

[解析]因为，由 ,得 ,，令得，令得，所以在上的单调递增区间为和.

4. （人教A版必修改编）函数在上的最大值为.

[解析]因为，所以，所以，所以，所以在上的最大值为.

##### 题组3 走向高考

5. [2023·天津卷]已知函数图象的一条对称轴为直线，一个周期为4，则的解析式可能为( B ).

A. B. C. D.

[解析]中，中，中，中，排除,.对于，当时，函数值，故是函数图象的一个对称中心，排除；对于，当时，函数值，故直线是函数图象的一条对称轴.故选.

### 考点聚焦·突破

#### 考点一 三角函数的定义域和值域［自主练透］

1. 函数的定义域为( C ).

A. B.

C. D.

[解析]由函数，得，

令 ,，解得,即函数的定义域为，故选.

2. 函数的定义域为 ,.

[解析]由，得 ,，即 ,，

由，得 ,，所以的定义域为 ,.

3. 函数在区间,上的值域为.

[解析]当时，，，故.

变式设问 若将题3中的条件“”改为“”，其他条件不变，则函数的值域为.

[解析]，

令,因为，所以，即，

则，故的值域为.



1.求三角函数的定义域通常需要解三角不等式（组），解三角不等式（组）常借助三角函数的图象.

2.三角函数值域（最值）的三种求法

|  |  |
| --- | --- |
| 直接法 | 直接利用,的值域求解 |
| 化一法 | 把所给三角函数化为的形式，由正弦函数的单调性写出函数的值域（最值） |
| 换元法 | 把,,或换成，转化为二次函数的值域（最值）问题求解 |

#### 考点二 三角函数的周期性、奇偶性、对称性［多维探究］

##### 三角函数的周期性角度1

典例1 [2022·新高考Ⅰ卷]记函数的最小正周期为.若 ，且的图象关于点中心对称，则( A ).

A. 1 B. C. D. 3

[解析]由函数的最小正周期满足 ，得 ，解得，

因为函数的图象关于点中心对称，

所以 ,，且，

所以,，取,所以，，所以.故选.



**三角函数最小正周期的求解方法**

1.定义法.

2.公式法：函数的最小正周期，函数的最小正周期.

3.图象法：求含有绝对值符号的三角函数的周期时可画出函数的图象，通过观察图象得出周期.

##### 三角函数的奇偶性角度2

典例2 已知函数，则( B ).

A. 若，则为奇函数 B. 若，则为偶函数

C. 若，则为偶函数 D. 若 ，则为奇函数

[解析]的定义域为，

对于，若，则，若为奇函数，则，而不恒成立，故不是奇函数,故错误；

对于,若，则，则，故为偶函数，故正确；

对于,若，则，，故不是偶函数，故错误；

对于,若 ，则，若为奇函数，则，而不恒成立，故不是奇函数,故错误.故选.



**判断三角函数奇偶性的方法**

三角函数中奇函数一般可化为或的形式，而偶函数一般可化为的形式.

##### 三角函数的对称性角度3

典例3 已知函数的图象关于直线对称，则在上的最小值为( A ).

A. B. C. D.

[解析]由题意得, ,，则 ,，又，所以，则，因为，所以，所以，所以的最小值为.故选.



**三角函数的对称性问题的两种求解方法**

|  |  |
| --- | --- |
| 定义法 | 正（余）弦函数图象的对称轴是过函数图象的最高点或最低点且垂直于轴的直线，对称中心是图象与轴的交点，对称中心的横坐标为函数的零点 |
| 公式法 | 函数图象的对称轴为直线，对称中心为点；函数图象的对称轴为直线，对称中心为点；函数图象的对称中心为点.上述 |

##### 多维训练

1. 函数的图象的一个对称中心是点( A ).

A. B. C. D.

[解析]由正切函数图象的对称中心为点,,可知的图象的对称中心的横坐标满足,，

，，带入四个选项中可知，当时，.

故点是函数图象的一个对称中心.故选.

2. [2024·济南模拟]已知函数的最小正周期为 ，则的图象关于( B ).

A. 直线对称 B. 直线对称 C. 点对称 D. 点对称

[解析]由题意可知， ，解得，即，，故直线不是对称轴，也不是对称中心；，故直线是对称轴，点不是对称中心.故选.

3. [2024·陕西模拟]已知函数是奇函数，则.

[解析]，因为函数是奇函数，所以 ,，解得 ,，因为，所以.

#### 考点三 三角函数的单调性［师生共研］

典例4 以下是函数的单调递增区间的为( A ).

A. B. C. D.

[解析]因为函数的单调递增区间为，所以，解得，

取，可得函数的一个单调递增区间为，

则，选项满足条件；

取，可得函数的一个单调递增区间为，,，选项均不满足条件.故选.

变式设问 若将典例4中的条件“”改为“”,则在上的单调递减区间为,.

[解析]由诱导公式得,则令 ，，解得 ，.令，，令，.故在区间上的单调递减区间为和.



**求三角函数单调区间的三种方法**

|  |  |
| --- | --- |
| 代换法 | 将比较复杂的三角函数中含自变量的代数式整体当作一个角（或）,利用复合函数的单调性列不等式求解.要注意求函数的单调区间时的符号，若，则一定要先借助诱导公式将化为正数,同时切莫漏掉考虑函数自身的定义域 |
| 图象法 | 画出三角函数的图象，结合图象求它的单调区间，注意正、余弦函数的单调区间长度为半个周期 |
| 特值法 | 若题目是选择题，则利用特殊值验证排除法求解更为简便 |

##### 针对训练

[2022·北京卷]已知函数，则( C ).

A. 在上单调递减 B. 在上单调递增

C. 在上单调递减 D. 在上单调递增

[解析].

对于，当时，，则在上单调递增，错误；

对于，当时，，则在上不单调，错误；

对于，当时，，则在上单调递减，正确；

对于，当时，，则在上不单调，错误.故选.